

(iii) $\implies$ (i)

Komponentenweise Konvergenz ergibt

Konvergenz $\|x_k - x\|_{\infty} \longrightarrow 0$

(ii) $\implies$ (iii)

wähle $p = \infty$; dann impliziert

$\|x_k - x\|_{\infty} \longrightarrow 0$ die Konvergenz der

einzelnen Komponenten



Satz 16.4 : Sei A Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) . Dann gilt:

A abgeschlossen $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ist } (x_n) \text{ konvergent} \\ \text{mit Gliedern aus} \\ \underline{A}, \text{ so folgt} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A \end{array} \right.$

Beweis : " $\Rightarrow$ " Seien $x_n \in A$ mit

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Wäre $x \notin A$, so ist x Element der
offenen Menge $X - A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(x) \subset X - A$$

$\Rightarrow x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n \gg N_\varepsilon$, also $x_n \notin A$!

" " $\Leftarrow$ " Zu zeigen: $X - A$ ist offen

falls nicht:

$\left\{ \begin{array}{l} \exists x \in X - A \text{ mit } B_\varepsilon(x) \not\subset X - A \quad (*) \\ \text{für alle } \varepsilon > 0 \end{array} \right.$

wähle $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, und

$x_n \in B_{1/n}(x)$, $x_n \in A$
 (vgl. $(*)$!)

offenbar : $x_n \rightarrow x$, also nach

Vor. $x \in A$, Wspr!

□

Vollständigkeit (vgl. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$!)

Def 16.7 (X, d) = metr. Raum

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge in X

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon$
für alle $n, m \geq N_\varepsilon$

(Bem : (x_n) konv. $\Rightarrow (x_n)$ C.F. ;
" $\Leftarrow$ i. a. falsch!)

b) (X, d) vollständig : $\Leftrightarrow$
jede C.F. ist konvergent

-171-

c) Ein vollständiger normierter Raum
heißt Banach - Raum.

Bem: 1.) Wir werden zeigen

$$\left. \begin{array}{l} (X, \|\cdot\|) \text{ normiert,} \\ \dim X < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow (X, \|\cdot\|) \text{ B-Raum}$$

2.) ein unvollständiger Raum:

$$X := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \text{stetig und } 2\pi\text{-} \\ \text{periodisch} \end{array} \right\}^{1/2}$$

mit Norm $\|f\|_{L^2} := \left(\int_0^{2\pi} f^2 dx \right)^{1/2}$

Wähle für f nun eine Treppenfkt.
 $\notin X$, die zudem 2π -periodisch

ist mit der Vereinbarung

$$f(x) := \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

betrachte $S_n(f) := n^{\text{tes Fourier Polynom}}$

es gilt:

- $S_n(f) \in \underline{X}$

- $\|S_n(f) - f\|_{L^2} \rightarrow 0,$

$$S_n(f)(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Satz 15.11 + 12)

Offensichtlich ist $S_n(f) \in C.F.$

bzgl. $\|\cdot\|_{L^2}$, man findet aber

kein $\tilde{f} \in \underline{X}$ mit $\|S_n(f) - \tilde{f}\|_{L^2}$

$\rightarrow 0$: daraus würde

folgen $\widetilde{f} = f$ abgesehen von den
Springstellen von f . Da aber f auf
 $\mathbb{R}$ stetig ist, könnte man f stetig
 ergänzen. M.a.W.: f ist auf $\mathbb{R}$ stetig!

merke: integrale Normen wie $\|\cdot\|_{L^p}$,
 $1 \leq p < \infty$, auf Räumen stetiger Fktn.
 erzeugen keine B-Räume

Wir halten noch fest

Satz 16.5 :

- a) $\mathbb{R}^n$ ist vollständig bzgl.
 irgendeiner Norm $\|\cdot\|_p$,
 $1 \leq p \leq \infty$.

b) Beschränkte Folgen (x_k) in $\mathbb{R}^n$,

d.h. $\sup_k \|x_k\|_p < \infty$ für ein

(und damit alle) p haben konvergente

Teilfolgen. (Bolzano - Weierstraß)

Beweis: komponentenweise Argumentation,
Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, B.-W. Eigenschaft
von $\mathbb{R}$ (vgl. auch Satz 16.3) $\square$

Frage: Ist $\mathbb{R}^n$ vollständig bzgl.
irgendeiner Norm $\|\cdot\|$?

Antwort ja, bedarf aber einiger

Vorbereitungen

Def 16.8 : $\text{diam}(A)$, Beschränktheit von A

Satz 16.6 : Cantorscher Durchschnitssatz

Def 16.9 : äquivalente Normen

Satz 16.7 : Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$

(Termin 12. ↑)

Kompaktheit in metrischen Räumen

Kompaktheit in metrischen Räumen

Erinnerung : $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$

Def 9.2

① $A \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}$ Kompakt : $\iff$

jede Folge $(x_n) \subset A$ hat eine in A
konvergente Teilfolge ("Folgenkompaktheit")

② Warum interessiert man sich für
kompakte Mengen?

Man möchte die Mengen B charakterisieren, für die man sicher sein kann, dass stetige Fktn.

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ Max. u. Min annehmen

③ $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt $\iff$ Satz 9.16 - 177 -

A beschränkt u. abgeschlossen

Man könnte ^{auch} ① als Def. für metrische Räume nehmen. Eine andere Möglichkeit wäre, einfach ③ als Def. hinzuzuziehen. Leider geht dann Aussage ② verloren!

Wir geben eine alternative Def., die nur mit top. Begriffen auskommt, die Äquivalenz aus ① erhält und Aussage ② sichert. Bei ③ gilt dann nur noch $\implies$.

Def 16.10: Sei (X, d) metrischer Raum
und $A \subset X$.

(i) Ein System offener Mengen $U_\alpha, \alpha \in I$
(= beliebige Indexmenge) heißt offene

Überdeckung von A , falls

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

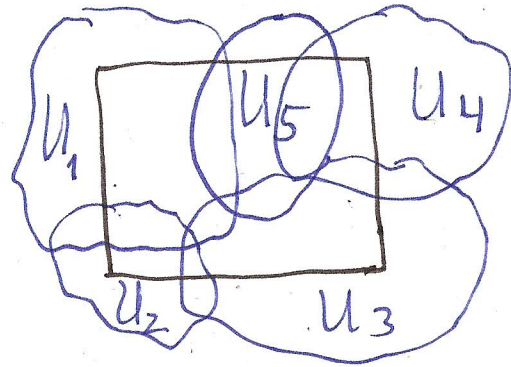
(ii) A heißt **kompakt**, wenn man
aus jeder offenen Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$
eine endliche Teilüberdeckung auswählen
kann, d.h. es gibt $J \subset I, \#J < \infty$,
mit $A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

("Überdeckungskompaktheit")

(iii) X Kompakter metrischer Raum

: $\Leftrightarrow X$ kompakte Menge im Sinne von (ii)

Bild zu (ii):



Beispiele (später mehr mit "Kriterien für Kompaktheit")

① Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Konvergente Folge in X , d.h. $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert.

Beh: $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Kompakt

Bew: Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ offene Überdeckung von $A \implies \exists \alpha_0 \in I$ mit